FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ejemplos notables en Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue

María Alonso Macías

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ejemplos notables en Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue

María Alonso Macías

Septiembre 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análisis Matemático
Título: Ejemplos notables en Teoría de la Medida e Integracíon de Lebesgue
Breve descrición do contido
Se trata de ampliar la colección de ejemplos notables relacionados con la Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue que se vieron en la materia de Cálculo Vectorial e Integración de Lebesgue.
Recomendacións
Tener buenos conocimientos de la teoría de la medida y de la integración de Lebesgue
Outras observacións

Índice general

Resumen VII

Introducción IX

1. Construcción de la medida y σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ **1**

1.1. Construcción de los espacios de medida . . . 1

1.2. Elementos de la medida de Lebesgue . . . 5

1.2.1. Celdas e intervalos . . . 6

1.2.2. La medida exterior . . . 7

1.2.3. Conjuntos medibles . . . 9

2. Conjuntos medibles y no Borelianos. El conjunto de Lusin **17**

2.1. Construcción del conjunto de Lusin . . . 17

2.2. El conjunto de Lusin es medible y no de Borel . . . 18

3. Conjuntos no medibles. El conjunto de Vitali en $\mathbb{R}^n$. **21**

3.1. Construcción del conjunto de Vitali . . . 21

3.2. El conjunto de Vitali es no medible . . . 22

3.2.1. Caso particular $n = 1$ . . . 22

3.2.2. Caso general $n \in \mathbb{N}$ . . . 23

4. Conjunto y función de Cantor **27**

4.1. Conjunto de Cantor . . . 27

4.2. Función de Cantor . . . 30

Bibliografía **35**

Resumen

En el presente trabajo, inicialmente, trataremos aspectos generales de la teoría de la medida para luego particularizar al caso de la construcción de la medida de Lebesgue. Será entonces, dentro del marco de la medida de Lebesgue, que analizaremos ejemplos interesantes de conjuntos medibles y no medibles. El primero que veremos, será el conjunto de Lusin, un conjunto que es Lebesgue medible, pero que no es de Borel. A continuación, mostraremos la construcción del conjunto de Vitali, que es el primer ejemplo de conjunto no medible que se conoce. Finalmente, veremos el conjunto medible de Cantor y, asociado a este, la función de Cantor, la cual emplearemos para la construcción de contraejemplos dentro de esta teoría de la medida.

Abstract

In the present work, initially, we will introduce the general aspects of the theory of the measure and then particularize the case of the construction of the Lebesgue measure. It will be inside this case that we will analyze interesting examples of measurable and non-measurable sets. The first one we will see will be Lusin's, a set that is measurable Lebesgue, but is not Borel's. Then, we will shown Vitali's, which is the first known example of a non-measurable set. Finally, we will see Cantor's measurable set and, associated with it, the Cantor function, which will be used to construct a counterexample within this measure theory.

Introducción

La Teoría de la Integración tiene sus raíces en el “método de agotamiento” que inventó Euxodos y que, en gran medida, fue desarrollado por Arquímedes con el propósito de calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas. El trabajo posterior de Newton y Leibniz permitió que este método se convirtiera en una herramienta sistemática para tales cálculos.

A medida que esta teoría se fue desarrollando, dejaron de preocupar tanto sus aplicaciones a la geometría y a la mecánica, para las cuales seguía siendo enteramente válida, y comenzaron a tratarse cuestiones más puramente analíticas, para las que la teoría clásica no siempre es suficiente.

La teoría clásica de la integración que culminó en la integral de Riemann ha sido reemplazada en gran parte por la teoría surgida del trabajo pionero de Henri Lebesgue a principios del siglo XX. La razón de esto es muy simple: los poderosos teoremas de convergencia asociados a la teoría de la integración de Lebesgue conducen a una teoría más general, más completa, y a resultados más elegantes de lo que admite la integral de Riemann.

La definición de Lebesgue de la integral amplía la colección de funciones para las que se define la integral. Aunque esta ampliación es útil en sí misma, su principal virtud es que los teoremas relativos al intercambio del límite e integral son válidos bajo condiciones menos estrictas que los supuestos que se requieren para la integral de Riemann. Dado que con frecuencia es necesario hacer tales intercambios, la integral de Lebesgue es más conveniente de manejar que la integral de Riemann.

Capítulo 1

Construcción de la medida y σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

En este primer capítulo haremos un repaso de los conceptos básicos de la teoría de la medida, en particular de la construcción de la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Después, a partir de esta, se definirán la medida de Lebesgue y los conjuntos medibles, además de demostrarse algunas de sus propiedades. Todo ello nos servirá para situarnos dentro del marco sobre el que trabajaremos los ejemplos de los capítulos posteriores.

A lo largo de este capítulo se hará uso de la referencia [1], concretamente de la introducción y de los capítulos 11, 12 y 13. Además, se utilizan [9] en la Observación 1.2. y [2, Teorema 5.10.] en la demostración del Teorema 1.19.

1.1. Construcción de los espacios de medida

Comenzamos viendo la definición de σ-álgebra, cómo caracterizarla y sus propiedades.

Definición 1.1. Dado un conjunto X, diremos que $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra en X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\varnothing, X \in \Sigma$.

2. Si $E \in \Sigma$, entonces $E^c = X \backslash E \in \Sigma$.

3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Observación 1.2. Como consecuencia directa de esta definición junto con las Leyes de De Morgan[9]:

$$(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c \quad \text{y} \quad (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha^c \tag{1.1}$$

para $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ e I un conjunto de índices cualquiera, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.3. *Si Σ es una σ-álgebra y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.*

Demostración. Se deduce directamente de la definición de σ-álgebra y de las Leyes de De Morgan. De modo que se obtiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} &\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \underbrace{\Rightarrow}_{\text{cond. 2}} \{E_n^c\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \underbrace{\Rightarrow}_{\text{cond. 3}} \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n^c \in \Sigma \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{\text{cond. 2}} (\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n^c)^c \in \Sigma \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{L. De Morgan}} \quad \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

□

Definición 1.4. Dados un conjunto X y Σ una σ-álgebra en X, al par formado por (X, Σ) lo llamaremos espacio medible.

Para poder caracterizar la condición 3 de la definición de σ-álgebra empleando conjuntos disjuntos dos a dos, vamos a demostrar el lema siguiente:

Lema 1.5. *Dados un espacio medible (X, Σ) y una colección numerable $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, existe una colección $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, con $F_i \cap F_j = \varnothing$, para $i \neq j$, que cumple que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \tag{1.3}$$

Demostración. Si definimos $F_1 = E_1$ y para cada $n > 1$,

$$F_n = E_n \setminus \left[\cup_{k=1}^{n-1} E_k\right] = E_n \cap E_1^c \cap ... \cap E_{n-1}^c \in \Sigma, \tag{1.4}$$

es evidente que $F_n \subset E_n$. Además, dados dos índices $i \neq j$, supongamos que $i > j$, se tiene que:

$$F_j \cap F_i \subset E_j \cap F_i = E_j \cap E_i \cap E_1^c \cap ... \cap E_j^c \cap ... \cap E_{i-1}^c = \varnothing. \tag{1.5}$$

Ahora, ya que $F_i \subset E_i, \forall i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Por último, dado $x \in \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_k$, si denotamos por j al menor de dichos k para los cuales $x \in E_k$, entonces $x \in F_j$, y, así, $x \in \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Tenemos, por tanto, que $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. □

En particular, se puede sustituir la mencionada condición por la unión numerable de elementos disjuntos. Caracterización alternativa que emplearemos más adelante para la obtención de la σ-álgebra de Lebesgue.

Antes de definir y enunciar las propiedades de medida y espacio de medida, vamos a hacer un breve inciso para dar la definición de la recta real extendida y de las operaciones algebraicas que encontramos entre sus elementos.

En teoría de la integración es frecuentemente conveniente unir los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ al sistema de números reales $\mathbb{R}$, cabe destacar que estos símbolos no son números reales. Además se introduce por convención que $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.6. Se define el conjunto $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ como la recta real extendida.

Uno de los motivos por los que queremos considerar $\bar{\mathbb{R}}$ es que es conveniente decir que la longitud de la recta real es igual a $+\infty$. Otra razón es que frecuentemente tomaremos el supremo de los números reales. Sabemos que un espacio no vacío A de números reales que tiene una cota superior tiene también supremo (en $\mathbb{R}$). Si definimos el supremo de un espacio no vacío que no tiene cota superior como $+\infty$, entonces todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ (o $\bar{\mathbb{R}}$) tiene un único supremo en $\bar{\mathbb{R}}$. De manera similar, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ (o $\bar{\mathbb{R}}$) tiene un ínfimo único en $\bar{\mathbb{R}}$.

Si (x_n) es una sucesión de $\bar{\mathbb{R}}$, definimos el límite superior y el límite inferior de la sucesión como $\limsup x_n = \inf_m \left(\sup_{n\geq m} x_n\right)$ y $\liminf x_n = \sup_m \left(\inf_{n\geq m} x_n\right)$, respectivamente. Si el límite inferior y superior coinciden, entonces a dicho valor se lo denota límite de la sucesión. Es evidente que esto coincide con la definición convencional cuando la sucesión y el límite pertenecen a $\mathbb{R}$.

Por último, introducimos las operaciones algebraicas entre los símbolos $\pm\infty$ y los elementos $x \in \mathbb{R}$:

- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty.$
- $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty.$
- $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty.$
- $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Nótese que no se definen las operaciones $(+\infty) + (-\infty)$ o $(-\infty) + (+\infty)$, ni tampoco se definen cocientes en los que el denominador sea $\pm\infty$.

Definición 1.7. Sean X, un conjunto; y Σ, una σ-álgebra de conjuntos de X. Entonces una función $\mu : \Sigma \longrightarrow \bar{R}$ se dice que es una medida en Σ si verifica las siguientes condiciones:

1. $\mu(\varnothing) = 0.$
2. $0 \leq \mu(E) \leq +\infty, \forall E \in \Sigma.$

3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ es tal que $E_i \cap E_j = \varnothing$, si $i \neq j$, entonces:
$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{1.6}$$

Es importante señalar que como $\mu(E) \geq 0$, la serie del lado derecho de la condición (1.6) es o bien absolutamente convergente, o bien diverge a $+\infty$.

Definición 1.8. Dada una σ-álgebra Σ en X y una medida μ en Σ, diremos que la terna (X, Σ, μ) es un espacio de medida.

Proposición 1.9. *Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), se tienen las siguientes propiedades:*

- *Si $E, F \in \Sigma$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
- *Si $\mu(E) < +\infty$, entonces $\mu(F\backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.*
- *Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ con $E_k \subset E_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces:*
$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.7}$$
- *Si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ con $F_{k+1} \subset F_k, \forall k \in \mathbb{N}$, y $\mu(F_1) < +\infty$, entonces:*
$$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n). \tag{1.8}$$

Demostración. Demostraremos cada una de las afirmaciones por separado.

- Por un lado, $F = E \cup (F\backslash E)$ y por otro, $E \cap (F\backslash E) = \varnothing$. Por tanto, $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F\backslash E)$, de donde deducimos que $\mu(E) \leq \mu(F)$, por ser $\mu(F\backslash E) \geq 0$.
- Como $\mu(E) < \infty$, tiene sentido plantear la resta $\mu(F) - \mu(E) = \mu(E) + \mu(F\backslash E) - \mu(E) = \mu(F\backslash E)$.
- Supongamos que $\mu(E_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$. Ya que en caso contrario, se da la igualdad trivialmente gracias a la monotonía de la medida que hemos probado anteriormente. Definamos los siguientes conjuntos que, visualmente, se podrían asemejar a coronas encajadas:
$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & E_1, \\ A_k & = & E_k \backslash E_{k-1}, \ \forall k \geq 2. \end{array} \tag{1.9}$$
Claramente, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ y, además, se tienen las siguientes propiedades:
$$\begin{array}{rl} A_i \cap A_j = \varnothing, & \forall i \neq j, \\ E_n = \cup_{k=1}^{n} A_k, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n. & \end{array} \tag{1.10}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n) &= \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(A_1)+\sum_{k=2}^{n}\mu(A_k)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(E_1)+\sum_{k=2}^{n}\mu(E_k\backslash E_{k-1})\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(A_1)+\sum_{k=2}^{n}\mu(E_k)-\mu(E_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n).\end{aligned} \tag{1.11}$$

- Trataremos este punto como un caso particular del anterior. En efecto, definimos los siguientes conjuntos:

  $$E_k = F_1\backslash F_k, k\in\mathbb{N}. \tag{1.12}$$

  De modo que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$, además, $\mu(E_n)<\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$, y $E_k\subset E_{k+1}, k\in\mathbb{N}$. Entonces nos encontramos bajo las condiciones del punto anterior, que garantiza:

  $$\begin{aligned}\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n) &= \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(F_1)-\mu(F_n) = \mu(F_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(F_n).\end{aligned} \tag{1.13}$$

  Teniendo en cuenta que:

  $$\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}F_1\backslash F_n = F_1\backslash\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n, \tag{1.14}$$

  se sigue que:

  $$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n) = \mu(F_1)-\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n), \tag{1.15}$$

  con lo cual:

  $$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(F_n). \tag{1.16}$$

□

1.2. Elementos de la medida de Lebesgue

Tras ver los conceptos y propiedades básicos de los espacios de medida, en este epígrafe nos centraremos en la construcción y estudio del caso particular del espacio de medida de Lebesgue.

1.2.1. Celdas e intervalos

Primeramente, describimos cómo son las celdas e intervalos que se emplean en este espacio y cómo se determina su volumen.

Definición 1.10. Una celda en $\mathbb{R}$ de extremos $a \leq b$ es un conjunto que tiene una de las siguientes formas:

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (celda abierta),
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (celda cerrada),
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (celda semi-abierta o semi-cerrada),
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (celda semi-abierta o semi-cerrada).

Definición 1.11. Dada una celda I de extremos $a \leq b$, se define su longitud como:

$$l(I) := b - a. \tag{1.17}$$

Debemos observar que las celdas de la Definición 1.10. tienen todas la misma longitud.

Observación 1.12. Aunque a las celdas también se las puede denotar como intervalos, no ocurre lo mismo con los conjuntos siguientes, que son intervalos, pero no celdas:

1. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
2. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,
3. $(b, -\infty) = \{x \in \mathbb{R} : b < x\}$,
4. $[b, -\infty) = \{x \in \mathbb{R} : b \leq x\}$,
5. $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$.

En estos casos, se tiene que $l(I) = \infty$.

Definición 1.13. Una celda I en $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, es el producto cartesiano de n celdas $I_1, ..., I_n$ en $\mathbb{R}$:

$$I = I_1 \times ... \times I_n. \tag{1.18}$$

Definición 1.14. Si $I = I_1 \times ... \times I_n$ es una celda de $\mathbb{R}^n$, definimos su volumen, $l(I)$, como el producto de las longitudes de todas las celdas $I_1, ..., I_n$. Es decir, si denotamos por $a_j \leq b_j$ a los extremos de la celda I_j, con $j = 1, ..., n$, el volumen de I viene dado por:

$$l(I) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n). \tag{1.19}$$

Definición 1.15. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la traslación de A por x de la siguiente forma:

$$x \oplus A := \{x + a : a \in A\}. \tag{1.20}$$

1.2.2. La medida exterior

Será interesante poder extender la noción de volumen de un conjunto de $\mathbb{R}^n$ a conjuntos que sean más generales que las celdas o los intervalos. Con el propósito de alcanzar dicha generalización, aparece el concepto de medida exterior.

Definición 1.16. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, definimos la medida exterior de E, $m^*(E)$, como:

$$m^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} l(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ \text{con } I_k \text{ una celda de } \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}\right\}. \tag{1.21}$$

Proposición 1.17. *La medida exterior m^* que acabamos de definir cumple las siguientes propiedades:*

- $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$, *para todo* $E \subset \mathbb{R}^n$ *y* $m^*(\varnothing) = 0$.
- *Si* $E \subset F$, *entonces* $m^*(E) \leq m^*(F)$.
- *Si* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k) \tag{1.22}$$

y se dice que m^* es numerablemente subaditiva.

En particular,

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B). \tag{1.23}$$

Demostración. Puede consultarse en [1, Teorema 12.3.]. □

Respecto a la última propiedad, la subaditividad numerable de la medida exterior; debemos observar que, a pesar de elegir conjuntos disjuntos dos a dos, es posible que no se dé la igualdad (condición necesaria para verificar la definición de medida). Para poder garantizar que se cumple dicha propiedad, será necesario restringirla a una cierta colección de conjuntos, los conjuntos Lebesgue medibles, los cuales definiremos en la próxima subsección.

En el teorema que veremos a continuación se muestra que si la distancia entre los conjuntos es estrictamente positiva, entonces sí se tiene la aditividad numerable.

Teorema 1.18. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B = \varnothing$ y*

$$dist(A, B) = \text{ínf}\{\| a - b \| : a \in A, b \in B\} > 0, \tag{1.24}$$

entonces

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B). \tag{1.25}$$

Demostración. Como ya hemos visto que siempre se cumple que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$, entonces es suficiente probar la desigualdad opuesta bajo las hipótesis de que $m^*(A \cup B) < +\infty$ y $\delta := dist(A, B) > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, consideremos un recubrimiento $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup B$ de forma que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) \leq m^*(A \cup B) + \epsilon, \tag{1.26}$$

y de modo que el diámetro de cada una de las celdas sea menor estricto que δ (en particular una celda no puede intersecar a la vez A y B). Podemos considerar los siguientes conjuntos de índices:

$$\begin{array}{rcl} J & = & \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap A \neq \varnothing\}, \\ K & = & \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap B \neq \varnothing\}, \\ H & = & \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap A = I_i \cap B = \varnothing\}. \end{array} \tag{1.27}$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} m^*(A) & \leq & \sum_{i\in J} l(I_i) \\ m^*(B) & \leq & \sum_{i\in K} l(I_i) \end{array}\right\} \Rightarrow m^*(A) + m^*(B) \leq \sum_{i\in J} l(I_i) + \sum_{i\in K} l(I_i) \tag{1.28}$$

por tanto:

$$m^*(A) + m^*(B) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} l(I_i) \leq m^*(A \cup B) + \epsilon. \tag{1.29}$$

Puesto que $\epsilon > 0$ era arbitrario, se tiene el resultado. □

Ahora veremos que el valor de la medida exterior de una celda de $\mathbb{R}^n$ coincide con su volumen.

Teorema 1.19. *Si I es una celda de $\mathbb{R}^n$, entonces $m^*(I) = l(I)$.*

Demostración. Para ver el primer contenido, dada una celda I, se tiene que el conjunto $\{I, \varnothing, \varnothing, ...\}$ es un recubrimiento de I, entonces:

$$m^*(I) \leq l(I) + 0 + 0 + ..., \tag{1.30}$$

de donde se sigue que $m^*(I) \leq l(I)$.

Para ver la otra desigualdad, dado $\epsilon > 0$, consideremos un recubrimiento por celdas abiertas $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de forma que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) \leq m^*(I) + \epsilon. \tag{1.31}$$

Si I fuese una celda cerrada, tomaríamos $J = I$, en caso contrario, consideraremos un cerrado $J \subset I$ de forma que $l(I) - \epsilon < l(J)$. Por el Teorema de Heine-Borel [2, Teorema 5.10.] existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$J \subset \cup_{k=1}^{N} I_k, \tag{1.32}$$

entonces se tiene que $l(J) \leq \sum_{k=1}^{N} l(I_k)$. Por tanto:

$$l(I) \leq l(J) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{N} l(I_k) + \epsilon \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \epsilon \leq m^*(I) + 2\epsilon, \tag{1.33}$$

de donde, ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $l(I) \leq m^*(I)$. □

A continuación probaremos que la medida exterior de un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones.

Teorema 1.20. *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$m^*(x \oplus E) = m^*(E). \tag{1.34}$$

Demostración. Por un lado, dado un recubimiento $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ por celdas de E, es evidente que $\{x \oplus I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $x \oplus E$. Teniendo esto cuenta y que el volumen de una celda es invariante por traslaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} m^*(x \oplus E) &\leq \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(x \oplus I_k) : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} = m^*(E). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Por otro lado, como dado un recubrimiento de $x \oplus E$, lo podemos trasladar para obtener un recubrimiento de E, se deduce la otra igualdad. □

1.2.3. Conjuntos medibles

Como comentamos anteriormente, en esta subsección caracterizaremos los conjuntos que garantizan la igualdad en la propiedad de la subaditividad numerable de m^*.

Definición 1.21. Sea m^* la medida exterior definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ verifica la condición de Carathéodory si:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \forall A \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.36}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todos los subconjuntos que cumplen la condición anterior.

Lema 1.22. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ verifica la condición de Carthéodory si, y solo si, para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ con $m^*(A) < +\infty$, se tiene que:*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.37}$$

Demostración. Como $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, se tiene, gracias a la subaditividad de la medida exterior, que:

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.38}$$

Por tanto, para que se cumpla la condición de Carathéodory (1.36), es suficiente con que se cumpla la desigualdad (1.37). Por último, debemos observar que, en caso de que $m^*(A) = \infty$, la condición (1.37) se cumple trivialmente. $\square$

A continuación veremos el resultado que nos permitirá caracterizar los conjuntos Lebesgue medibles a partir de la condición de Carathéodory.

Teorema 1.23. *(de Carathéodory) Sea m^* la medida exterior definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto $\mathcal{L}$ formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que verifican la condición de Carathéodory es una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^n$. Además, la restricción de m^* a $\mathcal{L}$ es una medida sobre $\mathcal{L}$.*

Demostración. Dividimos la demostración en dos partes: en la primera, demostraremos que el conjunto formado por los conjuntos que cumplen la condición de Carathéodory es una σ-álgebra y, en la segunda, veremos que la restricción de la medida exterior a la σ-álgebra anterior es una medida.

- $\mathcal{L}$ es una σ-álgebra.

  Por un lado, es claro que $\varnothing$ y $\mathbb{R}^n$ son elementos de $\mathcal{L}$. Por otro, dado $E \in \mathcal{L}$, es trivial demostrar que $E^c \in \mathcal{L}$. El punto más complicado es demostrar que la unión numerable de elementos de $\mathcal{L}$ sigue siendo un elemento de $\mathcal{L}$. Para demostrar esta última afirmación, seguiremos los siguientes pasos:

  1. Dados $E, F \in \mathcal{L}$, se tiene que $E \cap F \in \mathcal{L}$.

     Por un lado, ya que $E \in \mathcal{L}$, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que:

     $$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.39}$$

     Por otro lado, de la pertenencia de $F \in \mathcal{L}$, tomando en la condición de Carathéodory $A \cap E$, se obtiene:

     $$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c). \tag{1.40}$$

Juntando las expresiones (1.39) y (1.40) se obtiene:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.41}$$

Si ahora tomamos el conjunto $A \cap (E \cap F)^c$ en la condición de Carathéodory asociada a $E \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E \cap F)^c) &= m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E) + m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap F^c \cap E) + m^*(A \cap E^c), \end{aligned} \tag{1.42}$$

de donde la última igualdad se tiene como consecuencia de las siguientes igualdades entre conjuntos:

$$\begin{aligned} (A \cap (E \cap F)^c \cap E) &= ((A \cap E^c \cap E) \cup (A \cap F^c \cap E) = (A \cap F^c \cap E), \\ (A \cap (E \cap F)^c \cap E^c) &= ((A \cap E^c \cap E^c) \cup (A \cap F^c \cap E^c)) = (A \cap E^c). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (1.42) en (1.41), se obtiene:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap (E \cap F)^c) \tag{1.44}$$

y, ya que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ era arbitrario, se deduce que $(E \cap F) \in \mathcal{L}$.

2. Dados $\{E_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{L}$, disjuntos dos a dos, se tiene que $\cup_{k=1}^N E_k \in \mathcal{L}$ y, dado un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$m^*\left(A \cap \left(\cup_{k=1}^N E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^N m^*(A \cap E_k). \tag{1.45}$$

Veámoslo primero para el caso $N = 2$, sean, entonces, $E, F \in \mathcal{L}$ tales que $E \cap F = \varnothing$. Por el apartado anterior, $E \cup F \in \mathcal{L}$, esto es, si $E, F \in \mathcal{L}$ se tiene que $E^c, F^c \in \mathcal{L}$, por tanto, $E^c \cap F^c \in \mathcal{L}$ y, entonces, $(E^c \cap F^c)^c = E \cup F \in \mathcal{L}$. En particular, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario, si consideramos $(A \cap (E \cup F))$ en la condición de Carathéodory asociada a $E \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E \cup F)) &= m^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + m^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Por inducción se concluye que si $E_1, \ldots, E_n$ pertendecen a $\mathcal{L}$ y son disjuntos dos a dos, entonces $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ pertenece a $\mathcal{L}$ y

$$m^*(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)) = m^*(A \cap E_1) + ... + m^*(A \cap E_n) \tag{1.47}$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

3. Dados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, disjuntos dos a dos, se tiene que $\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{L}$ (tal y como hemos visto en el Lema 1.5. esta condición es equivalente a la tercera condición en la definición de σ-álgebra). Denotemos por

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k, \\ F_n &= \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \end{aligned} \tag{1.48}$$

se tiene por el punto anterior que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$. Por tanto, dado un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A\cap F_n) + m^*(A\cap F_n^c) \\ &= m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A\cap E_k\right) + m^*(A\cap F_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap F_n^c), \end{aligned} \tag{1.49}$$

donde la última igualdad es consecuencia del punto anterior. Ahora, puesto que $F_n \subset E$, se sigue que $A\cap F_n^c \supset A\cap E^c$, y gracias a la monotonía de la medida exterior,

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap E^c), \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1.50}$$

Si tomamos límite cuando $n\to\infty$ en ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap E^c). \tag{1.51}$$

Por otro lado, de la subaditividad numerable de la medida exterior, se tiene:

$$\begin{aligned} m^*(A\cap E) &= m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A\cap E_k\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k). \end{aligned} \tag{1.52}$$

Por tanto,

$$m^*(A) \geq m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c), \tag{1.53}$$

entonces $E\in\mathcal{L}$.

- La medida exterior m^* restringida a $\mathcal{L}$ es una medida.

  Para demostrar este punto solo hace falta probar que m^* es σ-aditiva. Consideramos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, disjuntos dos a dos, y denotamos por $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Tomando $A = E$ en las ecuaciones (1.51) y (1.52) se tiene, respectivamente, que:

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k), \\ m^*(E) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k), \end{aligned} \tag{1.54}$$

  esto es:

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k). \tag{1.55}$$

□

Definición 1.24. Sea m^* la medida exterior definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. A la σ-álgebra $\mathcal{L}$ de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que verifica la condición de Carathéodory:

- Se la llamará σ-álgebra de Lebesgue.
- A los conjuntos $E \in \mathcal{L}$ se les llamará conjuntos Lebesgue medibles.
- A la restricción m de m^* a $\mathcal{L}$ se la llamará medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

A continuación veremos algunas de las propiedades del espacio de medida de Lebesgue. Empezaremos probando que cualquier celda de Lebesgue es medible y así, su volumen concidirá con la medida de Lebesgue.

Teorema 1.25. *Si I es una celda en $\mathbb{R}^n$, entonces I es Lebesgue medible y, además, $m(I) = l(I)$.*

Demostración. Lo único que hay que probar es que las celdas cumplen la condición de Carathéodory, ya que por una de las propiedades de la medida exterior, tenemos que el volumen de una celda coincide con su medida exterior. Demostraremos el resultado para celdas abiertas de $\mathbb{R}$, siendo la extensión a otra clase de celdas inmmediata. Para la demostración en $\mathbb{R}^n$ remitimos a la referencia [1, Teorema 13.7.].

Sea entonces $I \subset \mathbb{R}$ una celda abierta y tomemos $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida exterior finita, $m^*(A) < \infty$. Habrá que demostrar que $m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c)$.

Definimos a continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$, los siguientes conjuntos:

$$I_n = \left\{ x \in I : dist(x, I^c) > \frac{1}{n} \right\}, \tag{1.56}$$

de modo que $I_n \subset I$. Además, $I \backslash I_n$ está contenido en dos celdas, cada una de las cuales tiene longitud menor que $1/n$, con lo cual, $\lim_{n\to\infty} m^*(I\backslash I_n) = 0$.

Ahora, $A \subset (A \cap I_n) \cup (A\backslash I)$, siendo $dist(A \cap I_n, A\backslash I) \geq 1/n$, de donde, gracias a la monotonía de la medida exterior y al Teorema 1.18., se tendrá que:

$$m^*(A) \geq m^*((A \cap I_n) \cup (A\backslash I)) = m^*(A \cap I_n) + m^*(A\backslash I). \tag{1.57}$$

Por otro lado, como:

$$A \cap I = (A \cap I_n) \cup (A \cap (I\backslash I_n)), \tag{1.58}$$

se tiene, gracias a la monotonía y la subaditividad numerable de la medida exterior, que:

$$m^*(A \cap I_n) \leq m^*(A \cap I) \leq m^*(A \cap I_n) + m^*(A \cap (I\backslash I_n)). \tag{1.59}$$

Tomando límites en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $0 \leq m^*(A \cap (I\backslash I_n)) \leq m^*(I\backslash I_n) \to 0$, obtenemos:

$$m^*(A \cap I) = \lim_{n\to\infty} m^*(A \cap I_n). \tag{1.60}$$

Ahora podemos tomar límites en (1.56) y se obtiene:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A\backslash I), \tag{1.61}$$

o, lo que es lo mismo, $I \in \mathcal{L}$. $\square$

Ahora que hemos visto que cualquier celda es Lebesgue medible, probaremos que, de hecho, la medida de Lebesgue es la única medida para la cual el volumen de las celdas coincide con su medida.

Teorema 1.26. *Si $\bar{\mu}$ es una medida definida en $\mathcal{L}$ tal que $\bar{\mu}(I) = l(I)$ para todas las celdas $I \subset \mathbb{R}^n$, entonces, $\bar{\mu} = m$.*

Demostración. Por un lado, dados un conjunto medible cualquiera $E \in \mathcal{L}$ y $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por celdas abiertas de E, se tiene, por ser $\bar{\mu}$ una medida cuyo valor coincide con el volumen de las celdas, que:

$$\bar{\mu}(E) \leq \bar{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(J_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} l(J_i), \tag{1.62}$$

esto es, $\bar{\mu}(E) \leq m^*(E) = m(E), \forall E \in \mathcal{L}$.

Por otro lado, dado $k \in \mathbb{N}$, sea I_k la celda abierta de la forma:

$$I_k = (-k, k) \times (-k, k) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.63}$$

y sea $E \in \mathcal{L}$ tal que $E \subset I_k$, entonces se tiene que:

$$\bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(I_k \backslash E) = \bar{\mu}(I_k) = m^*(I_k) = m^*(E) + m^*(I_k \backslash E). \tag{1.64}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{\mu}(E) \leq m^*(E)$ y que $\bar{\mu}(I_k \backslash E) \leq m^*(I_k \backslash E)$, la igualdad anterior implica que $\bar{\mu}(E) = m^*(E)$ para cualquier conjunto $E \in \mathcal{L}$ tal que $E \subset I_k$. Si tomamos ahora un conjunto $E \in \mathcal{L}$ arbitrario y definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} E_1 &= E \cap I_1 \\ E_n &= E \cap (I_n \backslash I_{n-1}), n > 1. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Es evidente que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, siendo además los conjuntos disjuntos dos a dos y $\bar{\mu}(E_k) = m^*(E_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto:

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) = m^*(E), \tag{1.66}$$

de donde se deduce que ambas medidas coinciden. □

Por último, veremos que la medida de Lebesgue es un invariante por traslaciones. Para ello, se prueba que la traslación de cualquier conjunto medible sigue siendo Lebesgue medible y que, además, se conserva la medida.

Teorema 1.27. *Si $E \in \mathcal{L}$ es un conjunto medible y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x \oplus E \in \mathcal{L}$ y $m(x \oplus E) = m(E)$.*

Demostración. Ya se ha visto en el Teorema 1.20. que la medida exterior es invariante por traslaciones, por tanto, lo único que hay que comprobar es que si $E \in \mathcal{L}$, entonces $x \oplus E \in \mathcal{L}$.

Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$(z \oplus B) \cap A = z \oplus (B \cap [(-z) \oplus A]). \tag{1.67}$$

En efecto, dado un elemento $x \in (z \oplus B) \cap A$, existirá un elemento $b \in B$ tal que $x = z + b$ siendo $x \in A$. Por tanto, $x = z + (-z + x) \in z \oplus (B \cap [(-z) \oplus A])$ puesto que $-z + x = b \in B$. La otra implicación es análoga. Además, se puede demostrar de forma análoga que $(z \oplus B)^c = z \oplus B^c$.

Tomemos ahora $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $z = -x$, por el Teorema 1.20. se tiene que:

$$m^*((z \oplus B) \cap A) = m^*(z \oplus (B \cap [x \oplus A])) = m^*(B \cap [x \oplus A]). \tag{1.68}$$

Una vez vistos los resultados previos, estamos en condidciones de demostrar el teorema. Sean entonces $E \in \mathcal{L}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, veamos que $m^*(A) = m^*(A \cap (x \oplus E)) + m^*(A \cap (x \oplus E)^c)$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Por por ser la medida exterior invariante por traslaciones y $E \in \mathcal{L}$ se tiene lo siguiente:

$$m^*(A) = m^*(z \oplus A) = m^*((z \oplus A) \cap E) + m^*((z \oplus A) \cap E^c). \tag{1.69}$$

Ahora bien, si utilizamos (1.67) con $B = E$ y $B = E^c$ obtenemos que:

$$m^*(A) = m^*(A \cap (x \oplus E)) + m^*(A \cap (x \oplus E^c)), \tag{1.70}$$

de donde, gracias a que $(x \oplus E)^c = x \oplus E^c$, deducimos:

$$m^*(A) = m^*(A \cap (x \oplus E)) + m^*(A \cap (x \oplus E)^c), \tag{1.71}$$

tal y como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 2

Conjuntos medibles y no Borelianos. El conjunto de Lusin

En este capítulo se probará a través de la construcción de un ejemplo específico, el del conjunto de Lusin, que existen conjuntos medibles que no son de Borel. Esta afirmación la volveremos a tratar más adelante, aunque de manera indirecta, cuando hablemos de la función de Cantor en el capítulo cuarto. Otra forma de demostrarlo sería viendo que la cardinalidad de la σ-álgebra de Borel es menor que la cardinalidad de la σ-álgebra de Lebesgue, para este método puede consultarse el capítulo 14 de [1].

A lo largo de este capítulo hacemos uso de las referencias [8], de la sección 1.5. de [6], [10, Definición 1.4.16.] y [5].

Para abordar este capítulo es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 2.1. Dado un espacio topológico X, la σ-álgebra de Borel de X es la menor σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a todos los abiertos de X y se la denota por $\mathcal{B}$. A los conjuntos de $\mathcal{B}$ se les llama conjuntos de Borel.

2.1. Construcción del conjunto de Lusin

Para la construcción del ejemplo es necesario conocer, previamente, un par de conceptos. El primero, que se denota $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el espacio de Borel de todas las funciones que van del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, que también se puede entender como el de todas las sucesiones de números naturales. El segundo, la definición siguiente:

Definición 2.2. Se dice que una función (sucesión) $\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se dice compuesta si existe entre sus miembros un conjunto infinito de números tales que se dividen sucesivamente.

Entonces el conjunto constituido por todas las sucesiones compuestas es el conjunto de Lusin, que denotamos E.

Sin embargo, la definición de sucesión compuesta, presenta la siguiente ambigüedad: ¿Asumimos que entre los elementos de "el conjunto infinito" pueda ocurrir que números naturales idénticos tengan índices diferentes en la sucesión?. Por ejemplo, ¿es la compuesta la sucesión definida por $\alpha_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$?. Tomando la definición de una sucesión compuesta de acuerdo con las dos alternativas anteriores, obtenemos, respectivamente, dos "realizaciones" del conjunto discutido por Lusin:

$$E_1 = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \begin{bmatrix} \exists \text{ existe una función } \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ tal que } \gamma(k) \neq \gamma(n), \forall k \neq n, \\ \text{y } \alpha(\gamma(k+1))/\alpha(\gamma(k)) \text{ es un entero } \forall k \in \mathbb{N} \end{bmatrix} \right\}.$$

$$E_2 = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \begin{bmatrix} \exists \text{ una función } \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \text{ tal que } \alpha(\gamma(k+1))/\alpha(\gamma(k)) \text{ es} \\ \text{un entero mayor o igual que } 2 \ \forall k \in \mathbb{N} \end{bmatrix} \right\}.$$

Para una variante de la definición de sucesión compuesta tenemos $E = E_1$ y para la otra $E = E_2$. En todo caso, siempre tendremos que $E_2 \subseteq E_1$.

2.2. El conjunto de Lusin es medible y no de Borel

Ahora veremos que, en efecto, el conjunto de Lusin constituye un ejemplo de conjunto medible que no es de Borel. Se prueba que el conjunto de Lusin E es medible y no de Borel viendo que E_1 y E_2 son del mismo modo. Para ello, será necesario conocer, previamente, los siguientes resultados:

Definición 2.3. Un espacio polaco es un espacio topológico separable y completamente metrizable.

Definición 2.4. Sea X un espacio polaco. Un subconjunto $A \subset X$ es analítico si existe un espacio polaco Y, una aplicación continua $f : Y \to X$ y un conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B] = A$. Es decir, los conjuntos analíticos son las imágenes continuas de conjuntos de Borel.

Los conjuntos analíticos son medibles. Se tiene como particularidad de [6, Teorema 1.47].

Definición 2.5. Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos se dice que es de Borel si $f^{-1}(A)$ es un conjunto de Borel para cualquier conjunto abierto A.

Por tanto, lo que se va a demostrar es que E_1 y E_2 son analíticos y no borelianos. Entonces en la demostración se distinguen dos etapas: la primera, en la que se prueba que estos conjuntos son analíticos y la segunda, en la que se ve que no son de Borel. La idea de la demostración es la siguiente:

En la primera parte, resulta conveniente reformular la definición de los conjuntos de la siguiente manera:

- $E_1 = \{\alpha : \varphi(\alpha)\}$, donde φ viene determinada por la fórmula

$$\exists\gamma \text{ tal que } \begin{bmatrix} \forall k\ \exists n \text{ de modo que } \alpha(\gamma(k+1))/\alpha(\gamma(k)) = n\cdot\alpha(\gamma(k)) \\ \text{y} \\ \text{y } \forall k \forall n \text{ distintos, entonces } \gamma(k)\neq\gamma(n) \end{bmatrix}.$$

- $E_2 = \{\alpha : \varphi(\alpha)\}$, donde φ viene determinada por la fórmula

$$\exists\gamma \text{ tal que } \begin{bmatrix} \forall k\ \exists n \text{ de modo que } \alpha(\gamma(k+1))/\alpha(\gamma(k)) = n\cdot\alpha(\gamma(k)) \\ \text{y} \\ \text{siendo } n\geq 2 \end{bmatrix}.$$

Por [8, Lema 1.] se tiene que ambos conjuntos son analíticos.

En segunda parte, primero se construye un conjunto analítico $Q \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que no es de Borel. A continuación, se construye función de Borel $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que son equivalentes:

1. $\alpha \in Q$,
2. $F(\alpha) \in E_1$,
3. $F(\alpha) \in E_2$,

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Por último, se supone que E_i, $i = 1, 2$, es de Borel y se llega a que Q es boreliano, lo que supone una contradicción. Todo esto se ve en [8, Lema 2.].

Teorema 2.6. *Los conjuntos E_1 y E_2 son analíticos, pero no son de Borel.*

Demostración. Se puede consultar en [8, Teorema]. □

Capítulo 3

Conjuntos no medibles. El conjunto de Vitali en $\mathbb{R}^n$.

En este capítulo expondremos un ejemplo de conjunto de $\mathbb{R}^n$ no medible, viendo de este modo, que este tipo de conjuntos son más frecuentes de lo que cabe pensar en un principio. Para ello, será fundamental, en el sentido técnico, el empleo del Axioma de elección. El ejemplo escogido es el del conjunto de Vitali por tener una construcción más sencilla. Tanto para su construcción, como para la demostración de que no es medible, trataremos por separado el caso de $\mathbb{R}$ y el de $\mathbb{R}^n$.

Las referencias empleadas en este capítulo son [10, Proposición 1.2.18] y el capítulo 17 de [1].Además, [7, (1.1.)] será necesaria para la construcción del ejemplo y [1, Teorema 15.9.] en la demostración del Teorema 3.6.

3.1. Construcción del conjunto de Vitali

Comenzamos viendo cómo es la construcción del conjunto de Vitali en $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

En primer lugar, dado que $\mathbb{Q}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, podemos considerar el conjunto formado por las clases de equivalencia $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$. Ya que cada elemento C de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, este tiene intersección no vacía con $[0,1]$. Seguidamente, aplicando el Axioma de elección [7, (1.1.)], podemos tomar un representante, $x_c \in [0,1] \cap C$, para cada $C \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Finalmente, el conjunto de Vitali será el conjunto formado por todas las clases de equivalencia anteriores:

$$\mathcal{V} = \{x_c : C \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}. \tag{3.1}$$

Ahora, para poder continuar y dar la construcción general del conjunto de Vitali en $\mathbb{R}^n$, será necesario conocer la definición siguiente:

Definición 3.1. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es racionalmente equivalente a y, escribimos $x \sim y$; si $x - y \in \mathbb{Q}^n$, es decir, si cada componente $x_i - y_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Es fácil comprobar que esta relación es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$[(1) $x \sim x$; (2) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$; (3) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$].

Como mediante el cociente de $\mathbb{R}^n$ por la relación de equivalencia racional se obtiene una colección disjunta de clases de equivalencia, entonces, empleando el Axioma de elección, se construye un conjunto $\mathcal{V}$ escogiendo un representante para cada una de esas clases, de modo que si $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ y $v_1 \sim v_2$, se tiene que $v_1 = v_2$. Este conjunto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ se conoce como conjunto de Vitali.

Además, si $q \in \mathbb{Q}^n$, se escribe

$$\mathcal{V}_q := q \oplus \mathcal{V}. \tag{3.2}$$

Es sencillo ver que si $q, q' \in \mathbb{Q}^n, q \neq q'$, entonces $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{V}_{q'} = \varnothing$.

3.2. El conjunto de Vitali es no medible

El objetivo principal de este capítulo es dar un ejemplo de conjunto no medible, así que veamos que, efectivamente, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ es no medible. Para ello, distinguimos dos casos:

3.2.1. Caso particular $n = 1$

Dividimos la demostración en dos casos para apreciar lo que se simplifica en este.

Teorema 3.2. *El conjunto de Vitali en* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *es no medible.*

Demostración. Realicemos un razonamiento por reducción al absurdo y supongamos que $\mathcal{V}$ es Lebesgue medible.

Por un lado, dado $y \in [0, 1]$ se tiene que $y \in C \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. En particular, $y - x_c = q$, con $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, entonces tenemos:

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q \oplus \mathcal{V}). \tag{3.3}$$

Por otro lado, resulta claro que:

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q \oplus \mathcal{V}) \subset [-1, 2]. \tag{3.4}$$

Por tanto, gracias a la monotonía de la medida exterior:

$$m^*([0, 1]) \leq m^* \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q \oplus \mathcal{V}) \right) \leq m^*([-1, 2]). \tag{3.5}$$

Ahora, dados $p, q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ distintos, se tiene que $(p \oplus \mathcal{V}) \cap (q \oplus \mathcal{V}) = \varnothing$. En efecto, si $h \in (p \oplus \mathcal{V}) \cap (q \oplus \mathcal{V})$, entonces $h = p + x_{C_1} + q + x_{C_2}$, de donde $x_{C_1} - x_{C_2} = p - q \in \mathbb{Q}$, por tanto, $x_{C_1} = x_{C_2}$ y, finalmente, $p = q$ que es una contradicción.

Al suponer que $\mathcal{V}$ es un conjunto medible, también lo será $q \oplus \mathcal{V}$ para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, con lo cual, por las propiedades de la medida exterior sobre conjuntos medibles:

$$m^* \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} q \oplus \mathcal{V} \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m^*(q \oplus \mathcal{V}) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m^*(\mathcal{V}). \tag{3.6}$$

Finalmente, se llega a que:

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m^*(\mathcal{V}) \leq 3, \tag{3.7}$$

lo cual es una contradicción ya que si $m^*(\mathcal{V}) = 0$, tendríamos que $1 \leq 0$ y si $m^*(\mathcal{V}) > 0$, tendríamos que $\infty \leq 3$.

□

3.2.2. Caso general $n \in \mathbb{N}$

A continuación veremos cómo demostrar que el conjunto de Vitali es no medible para cualquier $n \in \mathbb{N}$, para ello, necesitaremos una serie de resultados previos.

Lema 3.3. *Sea $q_1, q_2, ...$ una enumeración del conjunto numerable $\mathbb{Q}^n$. Entonces $\mathbb{R}^n$ puede representarse como la unión disjunta:*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{V}_{q_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (q_i \oplus \mathcal{V}). \tag{3.8}$$

Por tanto, todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$ se puede representar de forma única como $x = q_i + v$ para algún q_i y algún $v \in \mathcal{V}$.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces x pertenece a una única clase de equivalencia racional. Si v es el representante de dicha clase, entonces $x - v = q_i$ para algún i, de modo que $x = q_i + v \in \mathcal{V}_{q_i}$. Si $i \neq j$, entonces los conjuntos $\mathcal{V}_{q_i}$ y $\mathcal{V}_{q_j}$ son disjuntos, como se señaló a continuación de (3.2). □

Definición 3.4. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto diferencia se define como

$$A \ominus A := \{x - y : x, y \in A\}. \tag{3.9}$$

Aunque es trivial, es útil observar que si $A \subseteq B$, entonces $A \ominus A \subseteq B \ominus B$.

Lema 3.5. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto con $m(K) > 0$. Entonces el conjunto diferencia $K \ominus K$ contiene un bola abierta centrada en el origen de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como $0 < m(K) < +\infty$, existe un conjunto abierto G tal que $K \subseteq G$ y $m(G) < 2m(K)$. Por ser K compacto y $G^c = \mathbb{R}^n \backslash G$ cerrado, se tiene que

$$\delta := dist(K, G^c) > 0. \tag{3.10}$$

Esto implica que si $\|x\| = dist(x, 0) < \delta$, entonces $x \oplus K \subseteq G$.

Se puede asegurar que $(x \oplus K) \cap K \neq \varnothing$. Ya que, si no, como se tiene que $K \cup (x \oplus K) \subseteq G$, por $(x \oplus K) \cap K = \varnothing$ y la aditividad de m se llegaría a

$$2m(K) = m(K) + m(x \oplus K) = m(K \cup (x \oplus K)) \leq m(G) < 2m(K), \tag{3.11}$$

que es una contradicción. Por tanto, $(x \oplus K) \cap K \neq \varnothing$ para todo x con $\|x\| < \delta$, y así, existen $k_1, k_2 \in K$ tales que $x = k_1 - k_2 \in K \ominus K$. Por lo que, finalmente, se tiene que el conjunto $K \ominus K$ contiene una bola abierta de centro 0 y radio δ. $\square$

Teorema 3.6. *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto arbitrario Lebesgue medible con $m(E) > 0$, entonces el conjunto diferencia $E \ominus E$ contiene una bola abierta de centro* 0.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n := \{x \in E : \|x\| < n\}$. Como $m(E) = \lim_n m(E_n)$, tenemos $m(E_n) > 0$ para un n suficientemente grande, entonces decimos para todo $n \geq n_0$. Nótese que $0 < m(E_{n_0}) < +\infty$. Por [1, Teorema 15.9.] existe un compacto $K \subseteq E_{n_0} \subseteq E$ con $0 < (1/2)m(E_{n_0}) \leq m(K)$. Como $K \subseteq E$, es claro que $K \ominus K \subseteq E \ominus E$. Por el Lema 3.5. anterior, concluimos que $K \ominus K$ contiene una bola abierta de centro cero; y por ello, $E \ominus E$ también. $\square$

Ahora sí, ya nos encontramos en condiciones de probar el resultado principal de este capítulo, que es que el conjunto de Vitali $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ no es medible.

Teorema 3.7. *El conjunto de Vitali $\mathcal{V}$ no es Lebesgue medible.*

Demostración. Se razonará por paso al contrarrecíproco. Supongamos lo contrario, que el conjunto $\mathcal{V}$ es medible. De este modo, se tienen dos posibilidades:

1. $m(\mathcal{V}) > 0$.

   Entonces el Teorema 3.6. nos garantiza que el conjunto diferencia $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}$ contiene una bola abierta de centro 0. Así, existe un elemento x, distinto de cero, contenido en dicha bola cuyas coordenadas son números racionales. Como x pertenece a la bola, podemos encontrar elementos $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ tales que $x = v_1 - v_2$. Pero entonces se tendría que $v_1 \sim v_2$, de lo que se conlcuye que $v_1 = v_2$ y $x = 0$, que resulta una contradicción. Por tanto, esto no es posible.

2. $m(\mathcal{V}) = 0$.

   Como la medida de Lebesgue es invariante ante traslaciones, se tiene $m(q \oplus \mathcal{V}) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}^n$. De la subaditividad numerable de m y (3.8) se sigue que

$$0 \leq m(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(q_i \oplus \mathcal{V}) = 0. \tag{3.12}$$

   Por tanto, se tendría que $m(\mathbb{R}^n) = 0$, lo que implicaría que la medida de todo subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ sería igual a 0, que es una contradición.

Así, el conjunto de Vitali no es Lebesgue medible. □

Capítulo 4

Conjunto y función de Cantor

En este capítulo mostraremos cómo se construye el conjunto medible de Cantor. Después, veremos distintas formas de definir la función de Cantor y demostraremos algunas de sus propiedades. Finalmente, se hará uso de la misma para encontrar un ejemplo de conjunto medible que no es de Borel.

Para elaborar este capítulo se ha hecho uso de las referencias [3], el capítulo 17 de [1], la sección 1.2. de [10] y la sección 4 del capítulo I de [2]. Además, se precisarán [2, Definición 7.2.] y [4, Teorema 1.1.] para la Proposición 4.4.; y [1, Teorema 17.7.] en el Ejemplo 4.5.

4.1. Conjunto de Cantor

El conjunto ternario de Cantor $\mathbb{F}$, se construye a partir del intervalo [0,1] mediante la eliminación sucesiva de los “tercios centrales”, de modo que se obtiene una sucesión de subconjuntos cerrados tales que $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_k \supseteq \cdots$. Detallamos el proceso a continuación:

Comenzamos subdividiendo el intervalo $C_o = [0,1]$ en tres intervalos de la misma longitud, que es $\frac{1}{3}$, y eliminamos el intervalo abierto central $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, entonces lo que nos queda es $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Ahora, para obtener C_2, se aplica esto a cada uno de dos los subintervalos cerrados que constituyen C_1. Por tanto, C_2 es el resultado de eliminar de C_1 los intervalos abiertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. En general, C_k consta de 2^k intervalos cerrados disjuntos, cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^k}$ y, a partir de él, se obtiene C_{k+1} eliminando los tercios centrales de cada uno de los intervalos por los que está constituido C_k.

Entonces, se tiene que el conjunto ternario de Cantor es el conjunto límite de la sucesión de conjuntos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n, \tag{4.1}$$

siendo los conjuntos $\{C_n\}$:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1], \\
C_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right], \\
C_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right], \\
\cdots & \quad \cdots \\
C_n &= \left[0,\frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n},\frac{3}{3^n}\right] \cup \left[\frac{6}{3^n},\frac{7}{3^n}\right] \cup \left[\frac{8}{3^n},\frac{9}{3^n}\right] \cup \cdots \\
&\quad \cdots \cup \left[\frac{3^n-3}{3^n},\frac{3^n-2}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3^n-1}{3^n},1\right], n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Gráficamente, los cinco primeros conjuntos de esta sucesión tienen el siguiente aspecto:

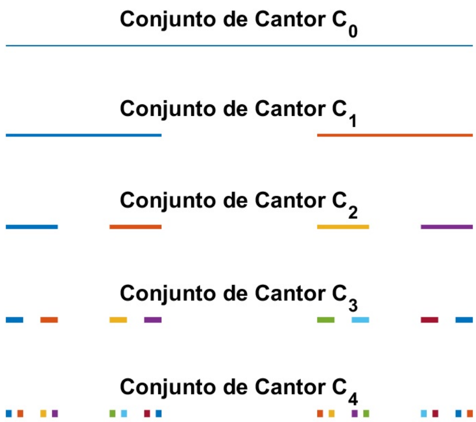

Figura 4.1: Evolución de los Conjuntos de Cantor.

Ahora, vamos a dar una forma alternativa de definir el conjunto de Cantor en base a la expansión en forma de serie ternaria (base 3) de un número.

Proposición 4.1. *Cada punto x del conjunto ternario de Cantor $\mathbb{F}$ se puede representar de manera única mediante una serie de la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \text{ siendo } a_n \in \{0,2\}, \ \forall n, \tag{4.3}$$

y todo número así representado está en $\mathbb{F}$.

Demostración. Podemos reescribir el número x de (4.3) con su expresión ternaria

$$0.a_1a_2a_3\ldots . \tag{4.4}$$

Ahora, veamos que no puede haber más de una representación de este tipo. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}, \tag{4.5}$$

donde cada b_n también es 0 o 2, debemos probar que $a_n = b_n$ para todo n. Supongamos que $a_n \neq b_n$ para algún n. Sea p el menor número natural tal que $a_p \neq b_p$. Entonces $|a_p - b_p| = 2$. Puesto que $|a_n - b_n| \leq 2$ para cada n, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \left| \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \right| &\geq \frac{1}{3^p} \left(|a_n - b_n| - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} \right) \\ &\geq \frac{1}{3^p} \left(2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \right) = \frac{1}{3^p}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

que es absurdo. Por tanto, $a_n = b_n$ para cada n.

Sean $G_{nk}, k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ los intervalos abiertos eliminados en el proceso de obtención de C_n. Se considera un número con expresión ternaria $0.b_1 b_2 b_3 \ldots$, donde cada $b_i \in \{0, 1, 2\}$. Es fácil ver que $0.b_1 b_2 b_3 \ldots \in G_{nk}$ para algún k si, y solo si, $b_m = 0$ o 2 para cada $m < n$, y $b_n = 1$; para $m > n$, b_n no tiene restricciones salvo que estos b_m's no pueden ser todos $0'$s o todos $2'$s. (Examinando la situación denotando los puntos extremos de los intervalos abiertos G_{nk} mediante su respectiva representación ternaria.)

□

A continuación, veamos que el conjunto de Cantor es un conjunto cerrado, medible, de medida cero y no numerable. Demostramos cada una de las afirmaciones por separado:

- Efectivamente, es cerrado por ser intersección numerable de conjuntos cerrados.

- En efecto, $\mathbb{F}$ es un conjunto medible porque se puede expresar como intersección numerable de conjuntos medibles.

- Dado $n \in \mathbb{N}$, resulta evidente que $\mathbb{F} \subset C_n$, por tanto, $m(\mathbb{F}) \leq m(C_n)$. Teniendo en cuenta, como se señaló en la construcción del conjunto ternario, que C_n está formado por 2^n intervalos de longitud $1/3^n$, se sigue que

$$m(\mathbb{F}) \leq m(C_n) \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n. \tag{4.7}$$

Ahora, como $\lim_{n \to \infty} (2/3)^n = 0$, se concluye que $m(\mathbb{F}) = 0$.

Observación 4.2. Alternativamente, se podría haber demostrado probando que la medida de los intervalos eliminados durante el proceso de construcción es 1. En efecto, la medida de los intervalos será:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} m([0,1]\backslash C_n) &= \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{2/3}{1-2/3} = 1.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} m(\mathbb{F}) &= m([0,1]) - m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1]\backslash C_n\right) \\ &= m([0,1]) - \sum_{n=1}^{\infty} m\left([0,1]\backslash C_n\right) = 0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

- Para probar este punto vamos a emplear un argumento basado en el proceso de diagonalización de Cantor. Por una lado, supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{F}$ y sean:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots, \\ x_2 & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots, \\ x_1 & = & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots, \\ \ldots & & \ldots \end{array} \tag{4.10}$$

las representaciones ternarias, tales que $a_{i,j} \in \{0,2\}$. Por otro lado, definamos:

$$a_n = \begin{cases} 0, & a_{nn} = 2, \\ 2, & a_{nn} = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Entonces se tiene que el número $x = 0.a_1a_2\ldots$ pertenece a $\mathbb{F}$, pero no a X. Por tanto, puesto que cualquier subconjunto numerable de $\mathbb{F}$ omitirá al menos, un número real en $\mathbb{F}$, se concluye que $\mathbb{F}$ no es numerable.

4.2. Función de Cantor

Asociada al conjunto de Cantor se puede definir una función φ que se conoce como función de Cantor. Para ello, se considera el conjunto de Cantor definido de la forma alternativa, $\mathbb{F} = \left\{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ con } a_n \in \{0,2\} \forall n\right\}$, entonces se define la función $\varphi : \mathbb{F} \to [0,1]$ como

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}. \tag{4.12}$$

Observación 4.3. La definición anterior es un caso particular de la siguiente. Sea $x \in [0,1]$ y consideremos su expansión en serie ternaria:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \ a_n \in \{0,1,2\}. \tag{4.13}$$

Denotemos por N al menor n tal que $a_n = 1$, si existe, y en caso de que esto no ocurra, tomamos $N = \infty$. Entonces la función de Cantor $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ se define como:

$$\varphi(x) := \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2^n}. \tag{4.14}$$

Una manera alternativa de definir la función de Cantor es hacerlo de forma iterativa. Primeramente, se define la sucesión de funciones escalera de Cantor $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que las $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, son tales que:

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} < x \le 1, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde $F_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Después, se denota por $\mathcal{M}[0,1]$ al espacio de Banach [2, Definición 7.2.] de las funciones reales uniformemente acotadas en el intervalo [0,1] con la norma del supremo. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.4. *La función de Cantor φ es el único elemento de $\mathcal{M}[0,1]$ tal que*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(3x) & \textit{si } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \textit{si } \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi(3x-2) & \textit{si } \frac{2}{3} < x \le 1. \end{cases} \tag{4.16}$$

Si $F_0 \in \mathcal{M}[0,1]$, entonces la sucesión $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a φ.

Demostración. Se define el funcional $F : \mathcal{M}[0,1] \to \mathcal{M}[0,1]$ como

$$F(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Por ser el funcional anterior contractivo:

$$\|F(f_1) - F(f_2)\| \leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|, \tag{4.18}$$

el Teorema de Banach [4, Teorema 1.1.] garantiza que F tiene un único punto fijo f_0, esto es, $f_0 = F(f_0)$, y, además, $F_n \to f_0$ uniformemente en [0,1]. Se sigue de la definición de φ, que (4.17) se cumple. Por tanto, $F(\varphi) = \varphi$ y por unicidad $f_0 = \varphi$. □

Gráficamente, si tomamos $F_0 = x$, se tiene que el aspecto de las seis primeras funciones de la sucesión es el siguiente:

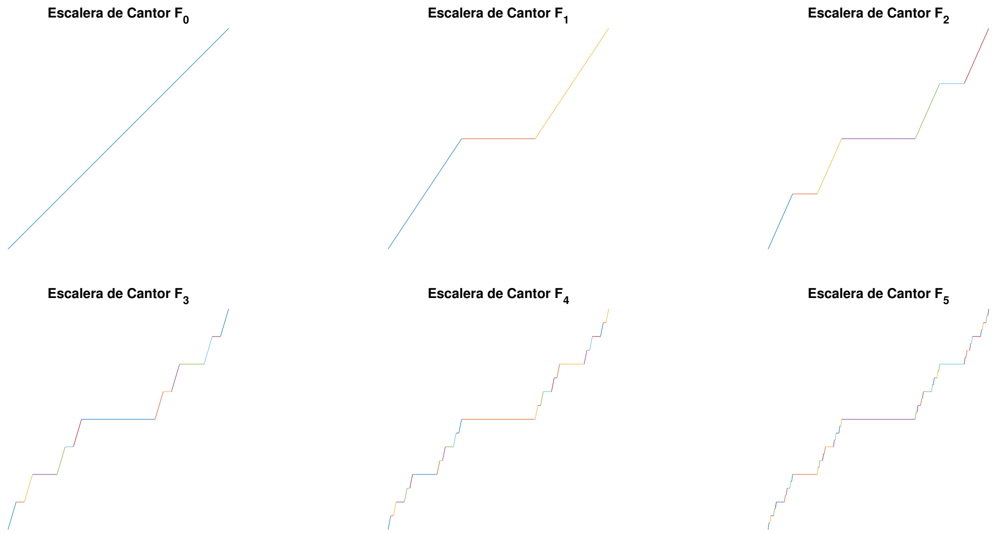

Figura 4.2: Evolución de las primeras funciones escalera de Cantor.

Ahora, retomamos la primera definición que hemos visto de la función de Cantor para enunciar y probar algunas de sus propiedades:

1. φ es monótona creciente.

   En efecto, sean $x', x'' \in \mathbb{F}$, pongamos que $x' < x''$, entonces existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n = 1, ..., N-1, a_{n_{x'}} = a_{n_{x''}}$ y $a_{N_{x'}} = 0 < a_{N_{x''}} = 2$. Por tanto, se tiene que $\varphi(x') \leq \varphi(x'')$.

2. φ no es inyectiva.

   Por ejemplo, si consideramos $x' = (0,020\underline{2})_3 < (0,022\underline{0})_3 = x''$, entonces se tiene que $\varphi(x') = (0,010\underline{1})_2 = (0,011\underline{0})_2 = \varphi(x'')$, puesto que:

$$\begin{aligned} \varphi(x') = (0,010\underline{1})_2 = \frac{1}{2^2} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}. \\ \varphi(x'') = (0,011\underline{0})_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

   De hecho, $\varphi(x') = \varphi(x'')$ para $x' < x''$ si, y solamente si, dichos puntos tienen la siguiente expansión en serie ternaria:

$$\begin{aligned} x' &= (0, a_1 a_2 ... a_N 0\underline{2})_3, \\ x'' &= (0, a_1 a_2 ... a_N 2\underline{0})_3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

   y esto solamente lo cumplen los puntos extremos de los intervalos eliminados mediante el proceso de construcción del conjunto de Cantor.

3. φ es sobreyectiva.

   Este punto se ha probado anteriormente, en la demostración de que el conjunto de Cantor es no numerable.

Acabamos de ver que la función de Cantor toma los mismos valores en los puntos extremos de cada intervalo eliminado en el proceso de construcción del conjunto de Cantor. Entonces utilizamos este hecho para extender, de manera continua, la función φ a todo el intervalo [0,1], asignando una constante a cada uno de los tercios centrales eliminado. En particular, dado $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ se define $\varphi(x) = \frac{1}{2}$. La función extendida, que seguiremos denotando por φ,mantiene las propiedades de ser monótona y creciente. Debemos observar que $\varphi'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1] \backslash \mathbb{F}$, ya que φ es constante en un entorno de esos puntos. Puesto que $m([0,1] \backslash \mathbb{F}) = 1$, se tiene que la derivada de la función de Cantor es igual a cero en casi todo punto, sin embargo, la función de Cantor está lejos de considerarse una función constante.

Por último, veamos que la función de Cantor puede utilizarse para construir contraejemplos dentro de la teoría de Lebesgue. En concreto, mostramos cómo emplearla para encontrar un conjunto medible o boreliano.

Ejemplo 4.5. Conjunto medible que no es de Borel.

Como señalamos en el Capítulo 2, la función de Cantor puede emplearse para demostrar que el conjunto de los elementos Lebesgue medibles es mayor que el de los conjuntos de Borel. En efecto, definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} \psi : & [0,1] & \longrightarrow & [0,2] \\ & x & \longrightarrow & \psi(x) = x + \varphi(x). \end{array} \tag{4.21}$$

Por una parte, se tiene que esta función es estrictamente monótona creciente por ser la suma de una función estrictamente creciente con una monótona creciente. Además, como es la suma de dos funciones continuas es continua y, entonces su inversa, ψ^{-1}, también lo será. Teniendo todo esto en cuenta, ψ es un homeomorfismo del intervalo [0,1] en el intervalo [0,2], entonces si B es un conjunto de Borel, tanto $\psi(B)$ (en el caso de que $B \subset [0,1]$), como $\psi^{-1}(B)$ (en el caso de que $B \subset [0,2]$) son conjuntos de Borel.

Por otra parte, como φ es constante en las componentes de $[0,1]\backslash\mathbb{F}$, se tiene que ψ lleva cada uno de los intervalos del conjunto anterior en intervalos de la misma longitud, es decir:

$$m(\psi([0,1]\backslash\mathbb{F})) = m([0,1]\backslash\mathbb{F}) = 1. \tag{4.22}$$

Además, teniendo en cuenta que $[0,2] = \psi(\mathbb{F}) \cup \psi([0,1]\backslash\mathbb{F})$, con $\psi(\mathbb{F}) \cap \psi([0,1]\backslash\mathbb{F}) = \varnothing$, se sigue, por la σ-aditividad de la medida, que:

$$2 = m(\psi(\mathbb{F})) + m(\psi([0,1]\backslash\mathbb{F})). \tag{4.23}$$

Entonces deducimos que $m(\psi(\mathbb{F})) = 1$, lo que significa que ψ es un homeomorfismo que aplica un conjunto de medida cero en uno de medida igual a 1.

Como $\psi(\mathbb{F})$ tiene medida positiva, el [1, Teorema 17.7.] nos garantiza que existe un conjunto no medible W tal que $W \subset \psi(\mathbb{F})$. Por tanto, $V = \psi^{-1}(W) \subset \mathbb{F}$ es un conjunto medible puesto que es un subconjunto de un conjunto de medida nula. Pero V no puede ser de Borel, pues en caso de que sí lo fuera, se tendría que $W = \psi(V)$ sería un conjunto de Borel y, entonces medible, lo que es una contradicción.

Se deduce, como consecuencia indirecta de este razonamiento, que el conjunto de Cantor contiene subconjuntos que no son de Borel.

Bibliografía

[1] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[2] S.B. Chae. *Lebesgue Integration.* Universitext (Berlin. Print). Springer-Verlag, 1995.

[3] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, and M. Vuorinen. The Cantor function. *Expo. Math.*, 24(1), 2006.

[4] J. Dugundji and A. Granas. *Fixed Point Theory.* Number v. 1 in Fixed Point Theory. PWN-Polish Scientific Publishers, 1982.

[5] Borel function. Encyclopedia of Mathematics. `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Borel_function&oldid=29100`.

[6] C. Ivorra Castillo. Teoría descriptiva de conjuntos. `https://www.uv.es/ivorra/Libros/TD.pdf`.

[7] T. J. Jech. *The Axiom of Choice.* Springer Monographs in Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Amercan Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[8] V. G. Kanovei. Proof of a theorem of lusin. enero de 1978. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, vol. 23, n.o 1.

[9] De Morgan laws. Encyclopedia of mathematics. `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=De_Morgan_laws&oldid=35218`.

[10] T. Tao. *An introduction to measure theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.